

Bonusové úlohy: List 1

Kvantová teorie NBCM110, Utorok 10:40

1 Braketový formalizmus

3 body

V tomto príklade $\{|e_n\rangle\}$ označuje ortonormovanú bázu.

(a) Nech \hat{A} je unitárny operátor a $|a\rangle$ je daný vektor. Dokážte vzťah

$$\sum_n |\langle a|\hat{A}|e_n\rangle|^2 = \langle a|a\rangle. \quad (1)$$

Návod: využite podmienku úplnosti bázy.

(b) Uvažujme trojrozmerný vektorový priestor. Skonstruujte projektor \hat{P}_{23} na rovinu určenú vektormi $|e_1\rangle, |e_2\rangle$. \hat{P}_{23} sformulujte v maticovom a braketovom formalizme.

2 Odhad energie "nulových kmitov" harmonického oscilátora

5 bodov

Lineárny jednorozmerný harmonický oscilátor je popísaný Hamiltoniánom

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2 \quad (2)$$

a nachádza sa v stave $|\psi\rangle$. V danom stave vykazuje stredné hodnoty $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle := \langle\hat{x}\rangle = 0$, $\langle\hat{p}\rangle = 0$ a platí rovnosť

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (3)$$

kde $\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2}$ a $\Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2}$.

(a) Vyjadrite $\langle\hat{H}\rangle$ ako funkciu $\xi := (\Delta x)^2$ s pomocou vzťahu (3).

(b) Dokážte, že $\langle\hat{H}\rangle \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. Návod: nájdite minimum $\langle\hat{H}\rangle(\xi)$.

(c) Diskusia: Ak $\langle\hat{p}\rangle \neq 0$, čo by to znamenalo pre energiu? Prečo nie je možné dosiahnuť nulovú hodnotu $\langle\hat{H}\rangle$? Postačujú intuitívne odpovede.

3 Dynamika kvantového harmonického oscilátora

6 bodov

(a) Nech $|\psi(t)\rangle$ spĺňa Schrödingerovu rovnicu $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ s Hamiltoniánom \hat{H} nezávislým na čase. Strednú hodnotu ľubovoľného operátora \hat{O} v tomto stave budeme označovať $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle := \bar{O}$. Dokážte vzťah

$$\frac{d}{dt}\bar{A} = \frac{i}{\hbar}[\bar{H}, \bar{A}] \quad (4)$$

za podmienky, že operátor \hat{A} nezávisí na čase.

(b) Hamiltonián je daný rovnicou (2). S pomocou rovnice (4) odvodte vzťah pre $d\bar{x}/dt$. Komutátor na pravej strane zjednodušte pomocou vzťahu $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

(c) Analogickým postupom odvodte vzťah pre $d\bar{p}/dt$.

- (d) Ukážte, že veličiny \bar{x} a \bar{p} oscilujú s frekvenciou ω_0 .
 (e) Čo sa stane, ak je $|\psi(t)\rangle$ stacionárnym stavom?

4 Moment hybnosti vo sférických súradniciach

6 bodov

Operátor momentu hybnosti je v kartézskych súradniciach definovaný vzťahom $\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}}$, kde $\nabla_{\mathbf{r}}$ je gradient.

- (a) Ukážte, že zložky $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ je možné vyjadriť vo sférických súradniciach nasledovne:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= -i\hbar \left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cos\varphi \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right), \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \sin\varphi \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

Odporúčaný postup: nájdite v matematických tabuľkách vzťah

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi \cos\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

a podobné vzťahy pre $\partial/\partial y$ a $\partial/\partial z$.

- (b) Použite predchádzajúcich výsledkov k odvodeniu vzťahu

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]. \quad (5)$$

Nápoveda: $\sin^{-2}\vartheta = 1 + \cot^2\vartheta$.

- (c) Vyjadrite Laplaceov operátor $\nabla_{\mathbf{r}}^2$ pomocou $\hat{\mathbf{L}}^2$ s použitím vzťahu (5).
 (d) Odvodte výraz pre operátor kinetickej energie vo sférických súradniciach

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2}. \quad (6)$$

Aký je fyzikálny význam oboch členov na pravej strane?

Literatúra: *L.Skála, Úvod do kvantovej mechaniky*