Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Ing. Richard Korytár, PhD.
http://ctcm.kfkl.cz/kt2018

ZS 2018
13.11.2018

Bonusové úlohy: List 5
Kvantová teorie NBCM110, Utorok 10:40

1 Elektrón v magnetickom poli: Landauove hladiny **10 bodov**

Elektrón (náboj $-e < 0$) sa nachádaza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ určenou cez vektorový potenciál $\mathbf{A}$ so zložkami $A_i(\mathbf{r})$. Pomocou operátorov rýchlosti $\hat{v}_i = [\hat{p}_i + eA_i(\mathbf{r})]/m$ zavedieme Hamiltonián

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m \hat{v}_i^2 + \hat{H}_2[\hat{S}_i], \tag{1}$$

kde druhý člen popisuje väzbu magnetického poľa na spin.

(a) Dokážte komutačné vzťahy $[\hat{v}_k, \hat{v}_j] = -\mathrm{i}\frac{e\hbar}{m^2}\epsilon_{kjl} B_l$, kde ϵ_{kjl} je úpne antisymetrický tenzor.

(b) Budeme predpokladať, že magnetické pole je homogénne a orientované pozdĺž osi z, t.j. $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, a položíme $A_3 = 0$. Definujme operátory

$$\hat{\Pi} = \frac{m}{\sqrt{2e\hbar B}} (\hat{v}_1 - \mathrm{i}\hat{v}_2), \ \hat{\Pi}^\dagger = \frac{m}{\sqrt{2e\hbar B}} (\hat{v}_1 + \mathrm{i}\hat{v}_2). \tag{2}$$

Presvedčte sa o platnosti kanonického komutačného vzťahu $\left[\hat{\Pi}, \hat{\Pi}^\dagger\right] = 1$.

(c) Pripomente si klasické riešenie pohybu elektrónu v homogénnom magnetickom poli. Aká základná časová škála / frekvencia tento pohyb charakterizuje?

(d) Ukážte, že Hamiltonián je možné vyjadriť pomocou nových operátorov ako

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(\hat{\Pi}^\dagger\hat{\Pi} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hat{p}_3^2}{2m} + \hat{H}_2[\hat{S}_i]. \tag{3}$$

Vyjadrite ω_c. Popíšte získaný tvar $\hat{H}$.

(e) Vyjadrite vlastné hodnoty energie Hamiltoniánu (3), ktoré prináležia vlastným stavom hybnosti $\hat{p}_3$ s vlastnou hodnotou $p_3 = 0$. Zanedbajte spinové štiepenie ($\hat{H}_2 = 0$).

(f) Je známe, že vektorový potenciál nie je možné určiť jednoznačne. Presnejšie, magnetická indukcia $\mathbf{B}$ sa dá určiť z rôznych vektorových potenciálov (kalibrácií). Sú vzťahy z (a) kalibračne invariantné? Je Hamiltonián (1) kalibračne invariantný? Závisí spektrum na kalibrácií? (Bez výpočtu!)

2 Nestacionárny stav **4 body**

Elektrón v atóme vodíka sa nachádza v stave $\psi = A\left(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1}\right)$, kde ψ_{nlm} sú vlastné stavy s kvantovými číslami nlm.

(a) Z podmienky normalizácie ψ spočítajte faktor A a spočítajte strednú hodnotu energie v tomto stave. Zanedbajte relativistické korekcie.

(b) Zaujíma nás pravdepodobnosť P_{11}, s akou nájdeme elektrón v stave s kvantovými číslami $l=1, m=1$. Spočítajte ju z danej vlnovej funkcie.

(c) Zdôvodnite výsledok pre P_{11}. Prečo závisí/nezávisí na čase?

3 Rotácie Stern-Gerlachovho magnetu **7 bodov**

Nech $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor, $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ je vektor Pauliho matíc, $\hat{1}$ je jednotková matica 2×2 a ϕ je uhol. Zavedieme maticu

$$\exp\left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) := \hat{1} + \left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^3 + \ldots, \tag{4}$$

definovanú súčtom nekonečného radu, mocniny $\left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^n$ sú definované štandardným maticovým násobením. Tento rad má rovnaký tvar, ako rozvoj exponenciálnej funkcie, čo motivuje označenie $\exp\left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$.

(a) Overte platnosť vzťahu $\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \hat{1}$. Návod: $\hat{\sigma}_l\hat{\sigma}_j = \delta_{lj}\hat{1} + \mathrm{i}\epsilon_{ljk}\hat{\sigma}_k$.

(b) Overte jednoduché vzťahy $\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^{2k} = \hat{1}$ a $\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^{2k+1} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$.

(c) Dokážte vzťah $\exp\left(-\mathrm{i}\phi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \hat{1}\cos\phi - \mathrm{i}\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\sin\phi$ s využitím (b) a definície (4).

(d) Teraz sa presvedčte, ako možno pomocou týchto trikov vykonávať rotácie na priestore spinorov. Pre názornosť uvažujme rotácie okolo osi z, t.j. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$. Nech $\hat{U}_3(\theta) = \exp(-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_3)$. Ukážte, že $\hat{U}_3^\dagger(\theta) = \hat{U}_3(-\theta)$ a $\hat{U}_3^\dagger(\theta) = \hat{U}_3^{-1}(\theta)$.

(e) Dokážte nasledovné vzťahy

$$\hat{U}_3^\dagger(\theta)\hat{\sigma}_1\hat{U}_3(\theta) = \hat{\sigma}_1\cos\theta - \hat{\sigma}_2\sin\theta$$
$$\hat{U}_3^\dagger(\theta)\hat{\sigma}_2\hat{U}_3(\theta) = \hat{\sigma}_1\sin\theta + \hat{\sigma}_2\cos\theta$$
$$\hat{U}_3^\dagger(\theta)\hat{\sigma}_3\hat{U}_3(\theta) = \hat{\sigma}_3.$$

Využite základné pravidlá pre násobenie Pauliho matíc. Namiesto Taylorovho rozvoja využite výsledok (c).

Literatúra: *Sakurai, Modern Quantum Mechanics*, kap. 3.2