Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Ing. Richard Korytár, PhD.
http://ctcm.kfkl.cz/kt2018

ZS 2018

20.11.2018

Bonusové úlohy: List 6
Kvantová teorie NBCM110, Utorok 10:40

$\boxed{1}$ Hustota stavov: parabolický disperzný vzťah — 6 bodov

Voľná častica bez spinu sa pohybuje v "krabici" s periodickými okrajovými podmienkami (POP)

$$\psi(x+L,y,z)=\psi(x,y,z),\ \psi(x,y,z+L)=\psi(x,y,z),\ \psi(x,y+L,z)=\psi(x,y,z).$$

(a) Zopakujte si riešenie voľnej častice v krabici (Literatúra: *L.Skála, Úvod do kvantové mechaniky, kap. 4.2*) Hamiltonián má vlastné funkcie $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = L^{-\frac{3}{2}}\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Ktoré (diskrétne) hodnoty $\mathbf{k}=(k_x,k_y,k_z)$ spĺňajú POP? Presvedčte sa, že jednej povolenej hodnote $\mathbf{k}$ zodpovedá v priestore vlnových vektorov objem $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$.

(b) Vyjadrite závislosť vlastných energií $\epsilon(\mathbf{k})$ na vlnovom vektore $\mathbf{k}$ (Voľná Schrödingerova rovnica).

(c) Zaujíma nás počet stavov s energiou $\epsilon(\mathbf{k}) < E$, kde E je konštanta. Je možné ho vyjadriť pomocou vzťahu $\sum_{\mathbf{k}}\theta(E-\epsilon(\mathbf{k})) := N(E)$, kde $\theta(x)$ je skoková (Heavisideová) funkcia. Aký výsledok dostanete pre $N(E)$ ak $E<0$? (Bez výpočtu!)

(d) Geometrickou úvahou ukážte, že pre veľké $N(E)$ platí približný vzťah

$$N(E) = L^3\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\theta(E-\epsilon(\mathbf{k})). \tag{1}$$

(e) Priamym výpočtom (integrácia vo sférických súradniciach) nájdite explicitný výraz pre $N(E)$. Mali by ste dostať $N(E)\propto E^{3/2}$.

(f) Spočítajte hustotu stavov definovanú predpisom $D(E)=\mathrm{d}N(E)/\mathrm{d}E$.

(g) Ako by sa výsledok zmenil pre časticu so spinom $S\neq 0$? Predpokladáme voľnú časticu, spin nevstupuje do Hamiltoniánu, a teda S určuje degeneráciu hladín.

(h) Zopakujte výpočet v jedno- a dvojrozmernom prípade a presvedčte sa, že pre dané E hustota stavov rastie úmerne s d-rozmerným objemom systému L^d $(d=1,2,3)$.

$\boxed{2}$ Elektrón v magnetickom poli: degenerácia Landauových hladín — 8 bodov

Ako sme uvideli v príklade $\boxed{1}$ (List 5), magnetické pole zmení kvázi-spojité spektrum voľného elektrónu na diskrétne, s odstupom hladín $\hbar\omega_\mathrm{c}$. V tejto úlohe sa presvedčíte, že degenerácia Landauových hladín môže nadobudnúť makroskopické hodnoty, čo je kľúčové pre tzv. kvantový Hallov jav – príkladný *makroskopický kvantový jav.*

(a) Zopakujte si tvar energetických hladín pre voľnú časticu (bez magnetického poľa) v dvoch rozmeroch s periodickými okrajovými podmienkami, na obdĺžniku s rozmermi L_x, L_y (Úloha $\boxed{1}$, List 6).

(b) Položíme $\mathbf{A}(\mathrm{r}) = (0, xB, 0)$. Akému magnetickému poľu zodpovedá? Zavedieme operátory rýchlosti $\hat{v}_j = -\mathrm{i}\frac{\hbar}{m}\partial/\partial x_j + \frac{e}{m}A_j(\mathrm{r})$. Vyjadrite Hamiltonián $\hat{H} = \sum_j \frac{1}{2}m\hat{v}_j^2$; pre jednoduchosť neuvažujeme pohyb v smere osi z ($\hat{v}_3 = 0$), ani pôsobenie poľa na spin. Presvedčte sa, že sa $\hat{H}$ nemení voči transláciám pozdĺž osi y.

(c) Separácia premenných: vlnovú funkciu zapíšte v tvare $\psi_k(x, y) = e^{\mathrm{i}ky} f_k(x)$ a ukážte, že f_k spĺňa rovnicu $\hat{H}_k f_k(x) = E f_k(x)$, kde

$$\hat{H}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_\mathrm{c}^2\left(x + k\ell^2\right)^2. \tag{2}$$

Popíšte tento výsledok: Akému problému zodpovedá $\hat{H}_k$? Vyjadrite konštanty ω_c a ℓ! Aký fyzikálny rozmer má ℓ?

(d) Vlastné energie závisia na dvoch kvantových číslach: k a n. Uveďte explicitný výraz pre $E_{k,n}$ (bez výpočtu). Zapíšte vlnovú funkciu základného stavu $\psi_{k,n=0}(x, y)$ (nemusíte normalizovať). Načrtnite graf $\psi_{k,n=0}(x, y)$ v rovine (x, y)!

(e) Degenerácia Landauových hladín je vyjadrená tým, že energie nezávisia na k. Uvažujme časticu, ktorej pohyb je obmedzený na obdĺžnik s rozmermi L_x, L_y (pohyb v smere osi z neuvažujeme). Navyše budeme požadovať periodické okrajové podmienky v smere y. Aké hodnoty môže nadobúdať k, aby boli splnené?

(f) Degeneráciu hladín odhadneme nasledovnou úvahou: Všimnite si, že k posúva ťažisko $\psi_{k,n}(x, y)$ pozdĺž x, a teda len vlnové čísla k spĺňajúce podmienku $L_x/\ell^2 \geq k \geq 0$ sú kompatibilné s geometriou obdĺžnika ($-L_x \leq x \leq 0$). Ukážte, že počet prípustných hodnôt k je daný vzťahom $N = \frac{L_y}{2\pi}\frac{L_x}{\ell^2} = \frac{eB}{2\pi\hbar}L_x L_y$. Návod: priama úmera.