Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Ing. Richard Korytár, PhD.
http://ctcm.kfkl.cz/kt2018

ZS 2018
04.12.2018

Bonusové úlohy: List 7
Kvantová teorie NBCM110, Utorok 10:40

$\boxed{1}$ Operátor celkového spinu dvoch častíc **9 bodov**

Uvažujme dve častice (a, b), každá má rovnaký spin $\hbar s$, $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Spinový moment hybnosti častice „a" je reprezentovaný operátormi $\hat{S}_{i,\mathrm{a}}$, $i = z, y, z$ (a podobne pre časticu „b"). Operátory spinového momentu hybnosti oboch častíc sú dané súčtom $\hat{S}_i = \hat{S}_{i,\mathrm{a}} + \hat{S}_{i,\mathrm{b}}$. Ukážte, že pre operátor celkového spinu platí $\hat{S}^2 = 2\sum_i \hat{S}_{i,\mathrm{a}}\hat{S}_{i,\mathrm{b}} + \hbar^2 2s(s+1)$. Využite fakt, že spinové operátory častice „a" komutujú s operátomi častice „b".

$\boxed{2}$ Vlastné stavy operátora spinu dvoch častíc **15 bodov**

Uvažujme dve častice (a, b) so spinom $\hbar/2$. Častica a je popísaná spinorom $\binom{\chi_\uparrow}{\chi_\downarrow}_\mathrm{a}$ a častica b spinorom $\binom{\phi_\uparrow}{\phi_\downarrow}_\mathrm{b}$. Spinor dvojčasticového systému je direktný súčin spinorov pre a a b, označíme ho $\binom{\chi_\uparrow}{\chi_\downarrow}_\mathrm{a} \otimes \binom{\phi_\uparrow}{\phi_\downarrow}_\mathrm{b}$. Je to veličina, určená štvoricou komplexných čísiel.

(a) Operátor projekcie spinu na os z je daný predpisom

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(\hat{\sigma}_{z,\mathrm{a}} \otimes \hat{1}_\mathrm{b} + \hat{1}_\mathrm{a} \otimes \hat{\sigma}_{z,\mathrm{b}}\right) = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_\mathrm{a} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_\mathrm{b} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_\mathrm{a} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_\mathrm{b}\right], \quad (1)$$

kde pauliho matica $\hat{\sigma}_{z,\mathrm{a}}$ pôsobí len na spinor častice a, $\hat{1}_\mathrm{a}$ je jednotková matica na priestore spinorov a. Ukážte, že spinory $|11\rangle = \binom{1}{0}_\mathrm{a} \otimes \binom{1}{0}_\mathrm{b}$ a $|1-1\rangle = \binom{0}{1}_\mathrm{a} \otimes \binom{0}{1}_\mathrm{b}$ sú vlastnými vektormi $\hat{S}_z$ a stanovte príslušné vlastné hodnoty.

(b) Podobne postupujte so spinormi

$$|10\rangle = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\mathrm{a} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\mathrm{b} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\mathrm{a} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\mathrm{b}\right]/\sqrt{2} \quad \text{a} \quad |00\rangle = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\mathrm{a} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\mathrm{b} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\mathrm{a} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\mathrm{b}\right]/\sqrt{2}.$$

(c) Operátor kvadrátu celkového spinu $\hat{S}^2 = \sum_i (\hat{S}_{i,\mathrm{a}} + \hat{S}_{i,\mathrm{b}})^2$ je vyjadrený pomocou operátorov spinu jednotlivých častíc, t.j. $\hat{S}_{i,\mathrm{a}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_{i,a} \otimes \hat{1}_\mathrm{b}$ a $\hat{S}_{i,\mathrm{b}} = \frac{\hbar}{2}\hat{1}_\mathrm{a} \otimes \hat{\sigma}_{i,b}$. ukážte, že platí vzťah

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{2}\hbar^2 \hat{1}_a \otimes \hat{1}_b + \frac{1}{2}\hbar^2 \sum_{i=1}^{3} \hat{\sigma}_{i,\mathrm{a}} \otimes \hat{\sigma}_{i,\mathrm{b}} \quad (2)$$

(d) Pomocou vyjadrenia (2) ukážte, že spinory $|S, S_z\rangle$ zavedené v $\boxed{2}$(a) a $\boxed{2}$(b) sú vlastnými stavmi $\hat{S}^2$ a určite zodpovedajúce vlastné hodnoty.

(e) ako sa transformujú spinory $|S, S_z\rangle$ pri výmene častíc a $\mapsto$ b,b $\mapsto$ a?

$\boxed{3}$ Atómy na povrchu izolantu **11 bodov**

Dva atómy (1 a 2) sa nachádzajú adsorbované na povrchu izolantu. Ich spinové momenty $\hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2$ (po zložkách $\hat{S}_{i,1}, \hat{S}_{i,2}, i = 1,2,3$) interagujú pomocou tzv. výmennej interakcie, ktorá má tvar $I\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$, kde $I > 0$ je konštanta. Zároveň sa nachádzajú v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Hamiltonián, popisujúci excitované spinové stavy tohoto dvojatómového systému možno teda zapísať v tvare

$$\hat{H} = I\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \gamma B \left(\hat{S}_{z,1} + \hat{S}_{z,2} \right), \tag{3}$$

kde $\gamma > 0$ je konštanta.

(a) Zaveďte operátor celkového spinu $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$. Ukážte, že prvý člen v Hamiltoniáne (3) sa dá vyjadriť pomocou kvadrátu celkového spinu (t.j. $\hat{\mathbf{S}}^2$).

(b) Keďže Hamiltonián komutuje s $\hat{\mathbf{S}}^2$ a $\hat{S}_z$, vlastné energie môžeme klasifikovať podľa kvantových čísel S, S_z. Napíšte explicitný tvar vlastných energií $E(S, S_z)$. Aké hodnoty S, S_z sú prípustné?

(c) Nakreslite graf vlastných energií v závislosti na B, $B > 0$. Kedy nastáva degenerácia?

O fyzikálnej motivácií tohto cvičenia, ako aj závislosti energetických hladín na magnetickom poli, sa môžete dočítať v článku
*Otte et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 107203 (2009)*