Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Ing. Richard Korytár, PhD.
http://ctcm.kfkl.cz/kt2019

ZS 2019

30.9.2019

Bonusové úlohy: List 0
Kvantová teorie NBCM110, Utorok 14:00, M3

Príklady s bonusovými úlohami budú zverejňované na stránke http://ctcm.kfkl.cz/kt2019

1 Spektrálny rozklad jednoduchej matice — 3 body

Daná je nasledovná matica

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Overte, či má matica σ_y nasledovné vlastnosti:
symetrická, antisymetrická, hermitovská, unitárna, ortogonálna

(b) Nájdite vlastné vektory a vlastné čísla (λ_+, λ_-) matice σ_y!

(c) Zostrojte projekčné matice P_+, P_- na oba vlastné stavy.

(d) Overte vzťah $P_+P_- = 0$ a spočítajte $P_+ + P_-$. Čo tieto výsledky formálne vyjadrujú?

(e) Matica U je definovaná tak, že jej stĺpce sú vlastnými vektormi σ_y. Overte, že U je unitárna a $U^\dagger \sigma_y U$ je diagonálna.

2 Formalizmus spinu elektrónu a výsledky meraní — 3 body

Elektrón sa nachádza vo vlastnom stave $|-\rangle$ operátora spinu $\hat{S}_y$ (projekcie spinového momentu hybnosti na os y) s vlastnou hodnotou $-\frac{\hbar}{2}$. Vypočítajte

(a) strednú hodnotu $\langle -|\hat{S}_z|-\rangle$. Akému meraniu zodpovedá?

(b) S akou pravdepodobnosťou nameriame projekciu spinu na z-ovú os rovnú $\pm\frac{\hbar}{2}$?

(c) Pripravíme riedky zväzok elektrónov, každý elektrón je v stave $|-\rangle$. Na zväzku uskutočníme 100 meraní z-ovej projekcie spinu. Nakreslite histogram výsledného merania!

Pomocný vzťah: $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i,\ i = x, y, z$, kde σ_i sú Pauliho matice.

Príklad č. 3 je na ďalšej strane!

3 **Samozdružené operátory v súradnicovej reprezentácií** **3 + 3 body**

Operátor $\hat{A}$, ktorý spĺňa podmienku

$$\int \psi^*(\mathbf{r})\hat{A}\phi(\mathbf{r})\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int \left[\hat{A}\psi(\mathbf{r})\right]^* \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}^3, \tag{2}$$

sa nazýva samozdružený.

(a) Ukážte, že operátor zložky hybnosti $\hat{p}_y = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ je samozdružený. Použite metódu per partes a zanedbajte povrchové členy.

(b) Pre centrálne problémy klasickej mechaniky je možné zaviesť tzv. radiálnu zložku hybnosti $p_r = \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}$. V kvantovej mechanike nie je možné zaviesť radiálnu hybnosť priamočiaro. Zavedieme operátor $\hat{p}_t = \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\hat{\mathbf{p}}$, kde $\hat{\mathbf{p}}$ je vektor operátorov hybnosti. Je samozdružený? Zodpovedá (pozorovateľnej) radiálnej hybnosti?

Bonus: Môžete sa presvedčiť, že operátor $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ je samozdružený.