UNIVERZITA KARLOVA
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Ing. Richard Korytár, PhD.
http://ctcm.kfkl.cz/kt2019

ZS 2019

22.10.2019

Bonusové úlohy: List 4
Kvantová teorie NBCM110, Utorok 14:50, M3

1 Exponenty operátorov a Glauberova identita **5 bodov**

Vzťah $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$ očividne platí, ak $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Ak operátory nekomutujú, situácia je zložitejšia. Dokážte tzv. Glauberovu identitu

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \qquad \text{ak } [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \tag{1}$$

ktorá platí, ak $\hat{A}$ a $\hat{B}$ komutujú so svojím komutátorom (Glauber, Baker, Campbell, Hausdorff). Návod: viď *Klíma, Jan a Velický, Bedřich, Kvantová mechanika I. (Karolinum 2016), kap. D6; Klíma, Jan a Šimurda, Miroslav, Sbírka problémů z kvantové teorie, (Academia 2005); Cohen-Tannoudji, Quantum Physics, Complement BII* a iné učebnice kvantovej teórie.

2 Pravdepodobnosť prechodu do vzbudených stavov posunutého oscilátora II **5 bodov**

Vrátime sa k problému **2**, List 3, a spočítame pravdepodobnosť prechodu algebraickými technikami. Tento prístup nám umožní objaviť tzv. *koherentné stavy*, ktoré sú vlastnými stavmi anihilačného operátora. [1] Súbor vlastných stavov jednorozmerného lineárneho harmonického oscilátora (LHO) s ťažiskom v $x = 0$ budem označovať $\{|n, 0\rangle\}$ a súbor vlastných stavov LHO s ťažiskom v $x = y$ bude $\{|n, y\rangle\}$. Zrejme platí $|n, y\rangle = \hat{S}(y)|n, 0\rangle$, kde $\hat{S}(y) = \exp(-i\hat{p}y/\hbar)$ je operátor posunutia (viď úloha **3**, List 3).

(a) Ukážte, že $\hat{S}(y) = \exp\left[\tilde{y}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\right]$, pričom $\tilde{y}$ je parameter a $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ sú anihilačné a kreačné (znižovacie a zvyšovacie) operátory vo vzťahu k LHO s ťažiskom v $x = 0$. Vyjadrite $\tilde{y}$!

(b) Zdôvodnite rovnosť $\hat{S}(y) = e^{-\tilde{y}^2/2}e^{\tilde{y}\hat{a}^\dagger}e^{-\tilde{y}\hat{a}}$ pomocou identity (1).

(c) Ukážte, že $e^{-\tilde{y}\hat{a}}|0, 0\rangle = |0, 0\rangle$. Návod: Taylorov rozvoj.

(d) S pomocou predošlých krokov sa presvedčte, že platí rozvoj $|0, y\rangle$ do stavov $\{|n, 0\rangle\}$,

$$|0, y\rangle = \hat{S}(y)|0, 0\rangle = e^{-\tilde{y}^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{y}^n}{\sqrt{n!}}\ |n, 0\rangle. \tag{2}$$

Návod: Taylorov rozvoj $e^{\tilde{y}\hat{a}^\dagger}$.

(e) Spočítajte Franck-Condonov faktor $|\langle n, 0|0, y\rangle|$!

(f) Presvedčte sa, že stav posunutého oscilátora $|0, y\rangle$ je vlastným stavom anihilačného operátora $\hat{a}$ s vlastným číslom $\tilde{y}$. Návod: $\hat{a}|n, 0\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle$. Týmto stavom sa hovorí koherentné stavy.

[1] Majú dôležitú úlohu napr. v popise elektromagnetického poľa v laseroch.

$\boxed{3}$ Časový vývoj koherentných stavov **4 body**

Koherentné stavy $|\alpha\rangle$ definujeme predpisom

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \, |n\rangle, \tag{3}$$

kde $|n\rangle$ sú vlastné stavy LHO (ťažisko oscilátora v tejto úlohe nepotrebujeme uvádzať). Oproti predchádzajúcej úlohe sme definíciu koherentného stavu rozšírili aj na komplexné čísla α. Očividne platí

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{4}$$

(viď úloha $\boxed{\mathbf{2}}$(f)).

(a) Overte, či sú stavy $|\alpha\rangle$ zo vzťahu (3) normalizované.

(b) Explicitným výpočtom odvoďte nasledovný časový vývoj koherentného stavu

$$e^{-\mathrm{i}\hat{H}t}|\alpha\rangle = e^{-\mathrm{i}\omega t/2}|\alpha(t)\rangle, \text{ kde } \alpha(t) = \alpha e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5}$$

Budete potrebovať vzťah $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ a výraz pre vlastné hodnoty energie LHO.

(c) Odvoďte vzťah pre časový vývoj strednej hodnoty polohy

$$x(t) := \langle\alpha(t)|\hat{x}|\alpha(t)\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega m}} \mathrm{Re}\,[\alpha(t)] \tag{6}$$

a ukážte, že ide o harmonické oscilácie. Výsledok porovnajte s úlohou $\boxed{\mathbf{1}}$, List 2.

$\boxed{4}$ Energia koherentných stavov a klasická limita LHO **4 body**

K vyriešeniu tejto úlohy potrebujete vzťahy (3) a (4).

(a) Spočítajte strednú hodnotu energie v stave $|\alpha\rangle$. Návod: zíde sa komplexne pridružená rovnica (4). Závisí stredná hodnota energie na čase?

(b) Z úlohy $\boxed{\mathbf{2}}$ viete, že koherentný stav je možné vytvoriť náhlym posunutím ťažiska oscilátora o vzdialenosť y. Pre výsledný koherentný stav platí $|\alpha| = y\sqrt{m\omega/2\hbar}$. Vyjadrite jeho energiu ako funkciu y. Výsledok porovnajte so vzťahom pre energiu klasického LHO. V akom limite sa bude energia koherentného stavu blížiť ku klasickému vzťahu?