Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Ing. Richard Korytár, PhD.
http://ctcm.kfkl.cz/kt2019

ZS 2019

29.10.2019

Bonusové úlohy: List 5
Kvantová teorie NBCM110, Utorok 14:50, M3

1 Anizotrópny lineárny harmonický oscilátor (ALHO) **5 bodov**

Častica sa nachádza v trojrozmernej potenciálovej jame, popísanej potenciálom $V(x_i)$. Budeme študovať pohyb častice v okolí minima potenciálu (jamy).

(a) Zapíšte potenciál $V(x_i)$ aproximovaný druhým rádom Taylorovho rozvoja v okolí minima.

(b) Položme $V(x_i) \approx V_2(x_i) = V_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m\omega_i x_i^2$. Vysvetlite pôvod konštánt ω_i. Vo $V_2(x_i)$ sa nenachádzajú zmiešané členy, napr. $x_1 x_2$. Je korektné tieto členy zanedbať? Je daný tvar $V_2(x_i)$ generický?

(c) Zavedieme tri sady anihilačných a kreačných operátorov

$$\hat{x}_j = (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_j}}, \quad \hat{p}_j = \mathrm{i}(\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j)\sqrt{\frac{\hbar m\omega_j}{2}}, \quad \text{kde}\, j = 1,2,3 \tag{1}$$

(Imaginárnu jednotku označujeme symbolom i, na rozdiel od súradnicových indexov $i, j \in \{1,2,3\}$!) Spočítajte komutátory $[\hat{a}_i, \hat{a}_j], [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]$ a $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]$.

(d) Hamiltonián častice je $\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V_2(\hat{x}_i)$. Vyjadrite $\hat{H} = \hat{H}(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger)$ pomocou operátorov $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$, $i = 1,2,3$. Dostali ste Hamiltonián troch nezávislých oscilátorov?

(e) Nech $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1/2$. Stanovte štyri najnižšie vlastné energie ALHO, popísaného Hamiltoniánom z odseku (c).

2 Moment hybnosti a zákon zachovania v ALHO **4 body**

Hamiltonián ALHO je vyjadrený cez anihilačné a kreačné operátory z úlohy 1(c). Uvažujme špeciálny prípad s $\omega_1 = \omega_2$.

(a) Vyjadrite operátor projekcie momentu hybnosti $\hat{L}_3 = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1$ pomocou operátorov $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$. Bude užitočné upraviť výsledný výraz na tvar, v ktorom sú anihilačné operátory napravo od kreačných (tzv. *normálne usporiadanie*).

(b) Vyjadrite komutátor $[\hat{H}, \hat{L}_3]$ (pomocou $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$). Vysvetlite výsledok.

3 Hustota stavov: lineárny disperzný vzťah **3 body**

Častice s nulovou hmotnosťou (napríklad fotóny, akustické fonóny, ale aj elementárne excitácie v grafféne), majú lineárny disperzný vzťah $\epsilon(\mathbf{k}) = v|\mathbf{k}|$, $(v > 0)$. Spočítajte hustotu stavov $D(E)$ v 3 rozmeroch. Degeneráciu hladín v dôsledku spinu nebudeme uvažovať.

$\boxed{4}$ Lineárny disperzný vzťah v 1D a 2D **4 body**

Výpočet z úlohy $\boxed{\mathbf{3}}$ preveďte aj pre jedno- a dvojrozmerné systémy.

$\boxed{5}$ Kvantové fluktuácie momentu hybnosti **5 bodov**

Operátory momentu hybnosti $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ je možné vyjadriť pomocou zvyšovacích a znižovacích operátorov $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$. Použite tieto operátory k vyjadreniu strednej hodnoty $\hat{L}_x$ a strednej kvadratickej odchýlky $\hat{L}_x$ v stave $|l, m\rangle$.

(a) Spočítajte $\langle l, m|\hat{L}_x|l, m\rangle$. Využite vzťah

$$\hat{L}_\pm|l, m\rangle = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|l, m \pm 1\rangle \tag{2}$$

(b) Vyjadrite $\hat{L}_x^2$ cez $\hat{L}_\pm$.

(c) Spočítajte strednú kvadratickú odchýlku $(\Delta L_x)^2$ v stave $|l, m\rangle$.

(d) Vidíme, že v stave $|l, m\rangle$ moment hybnosti fluktuuje v smere x. Vyjadrite pomer $(\Delta L_x)^2/\langle\hat{L}_z\rangle^2$ v stave $|l, l\rangle$. Interpretujte výsledok: Ako sa správa relatívna veľkosť fluktuácie $\hat{L}_x$ s rastúcim l?