

Bonusové úlohy: List 0
Kvantová teorie I, NOFY075, Utorok 10:40, F2

Príklady s bonusovými úlohami budú zverejňované na stránke <http://ctcm.kfkl.cz/kt2019>

1 Spektrálny rozklad jednoduchej matice **3 body**

Daná je nasledovná matica

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Overte, či má matica σ_y nasledovné vlastnosti:
symetrická, antisymetrická, hermitovská, unitárna, ortogonálna
- (b) Nájdite vlastné vektory a vlastné čísla (λ_+ , λ_-) matice σ_y !
- (c) Zostrojte projekčné matice P_+ , P_- na oba vlastné stavy.
- (d) Overte vzťah $P_+P_- = 0$ a spočítajte $P_+ + P_-$. Čo tieto výsledky formálne vyjadrujú?
- (e) Matica U je definovaná tak, že jej stĺpce sú vlastnými vektormi σ_y . Overte, že U je unitárna a $U^\dagger \sigma_y U$ je diagonálna.

2 Formalizmus spinu elektrónu a výsledky meraní **3 body**

Elektrón sa nachádza vo vlastnom stave $|-\rangle$ operátora spinu \hat{S}_y (projekcie spinového momentu hybnosti na os y) s vlastnou hodnotou $-\frac{\hbar}{2}$. Vypočítajte

- (a) strednú hodnotu $\langle - | \hat{S}_z | - \rangle$. Akému meraniu zodpovedá?
- (b) S akou pravdepodobnosťou nameriame projekciu spinu na z -ovú os rovnú $\pm \frac{\hbar}{2}$?
- (c) Pripravíme riedky zväzok elektrónov, každý elektrón je v stave $|-\rangle$. Na zväzku uskutočníme 100 meraní z -ovej projekcie spinu. Nakreslite histogram výsledného merania!

Pomocný vzťah: $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$, $i = x, y, z$, kde σ_i sú Pauliho matice.

Príklad č. 3 je na ďalšej strane!

3 Samozdružené operátory v súradnicovej reprezentácii**3 + 3 body**Operátor \hat{A} , ktorý spĺňa podmienku

$$\int \psi^*(\mathbf{r}) \hat{A} \phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int [\hat{A} \psi(\mathbf{r})]^* \phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2)$$

sa nazýva samozdružený.

- (a) Ukážte, že operátor zložky hybnosti $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ je samozdružený. Použite metódu per partes a zanedbajte povrchové členy.
- (b) Pre centrálné problémy klasickej mechaniky je možné zaviesť tzv. radiálnu zložku hybnosti $p_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p}$. V kvantovej mechanike nie je možné zaviesť radiálnu hybnosť priamočiaro. Zavedieme operátor $\hat{p}_t = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}$, kde $\hat{\mathbf{p}}$ je vektor operátorov hybnosti. Je samozdružený? Zodpovedá (pozorovateľnej) radiálnej hybnosti?

Bonus: Môžete sa presvedčiť, že operátor $\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$ je samozdružený.