Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Ing. Richard Korytár, PhD.

ZS 2021

20.10.2021

http://ctcm.kfkl.cz/kt2021

Bonusové úlohy: List 4
Kvantová teorie I, NOFY075, Streda 10:40, F2

$\boxed{1}$ Koherentné stavy lineárneho harmonického oscilátora (LHO) — 4 body

Koherentné stavy $|\alpha\rangle$ definujeme predpisom

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle, \tag{1}$$

kde $|n\rangle$ sú vlastné stavy LHO a α je komplexné.

(a) Dokážte, že platí

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{2}$$

(b) Overte, či sú stavy $|\alpha\rangle$ zo vzťahu (1) normalizované.

(c) Explicitným výpočtom odvoďte nasledovný časový vývoj koherentného stavu

$$e^{-\mathrm{i}\hat{H}t}|\alpha\rangle = e^{-\mathrm{i}\omega t/2}|\alpha(t)\rangle, \text{ kde } \alpha(t) = \alpha e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3}$$

Budete potrebovať vzťah $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ a výraz pre vlastné hodnoty energie LHO.

(d) Odvoďte vzťah pre časový vývoj strednej hodnoty polohy

$$x(t) := \langle\alpha(t)|\hat{x}|\alpha(t)\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega m}}\mathrm{Re}\left[\alpha(t)\right] \tag{4}$$

a ukážte, že ide o harmonické oscilácie. Výsledok porovnajte s úlohou $\boxed{1}$, List 2.

$\boxed{2}$ Energia koherentných stavov a klasický limit LHO — 4 body

K vyriešeniu tejto úlohy potrebujete vzťahy (1) a (2).

(a) Spočítajte strednú hodnotu energie v stave $|\alpha\rangle$. Návod: zíde sa komplexne pridružená rovnica (2). Závisí stredná hodnota energie na čase?

(b) Uvažujme α reálne a zaveďme vzdialenosť y, definovanú predpisom $\alpha = y\sqrt{m\omega/2\hbar}$. Vyjadrite energiu koherentného stavu $|\alpha\rangle$ ako funkciu y. Výsledok porovnajte so vzťahom pre energiu klasického LHO. V akom limite sa bude energia koherentného stavu blížiť ku klasickému vzťahu?

$\boxed{3}$ Hustota stavov: lineárny disperzný vzťah — 3 body

Častice s nulovou hmotnosťou (napríklad fotóny, akustické fonóny, ale aj elementárne excitácie v grafénе), majú lineárny disperzný vzťah $\epsilon(\mathbf{k}) = v|\mathbf{k}|$, $(v > 0)$. Spočítajte hustotu stavov v 3 rozmeroch. Degeneráciu hladín v dôsledku spinu nebudeme uvažovať.

$\boxed{4}$ Lineárny disperzný vzťah v 1D a 2D — 4 body

Výpočet z úlohy $\boxed{\mathbf{3}}$ preveďte aj pre jedno- a dvojrozmerné systémy.

$\boxed{5}$ Niektoré vlastnosti vodíka — 3 body

Elektrón v základnom stave atómu vodíka je opísaný vlnovou funkciou

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad \text{kde}\, a = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{me^2}, \ \ r = |\mathbf{r}|. \tag{5}$$

(a) Nájdite strednú vzdialenosť elektrónu od jadra

(b) Nájdite strednú hodnotu potenciálnej energie $V(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ v tomto stave. Porovnajte s hodnotou potenciálnej energie v strednej vzdialenosti.

$\boxed{6}$ Komutačné vzťahy pre moment hybnosti — 3 body

Odvoďte komutačné vzťahy:

(a) $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$

(b) $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i]$

(c) $[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0.$

(d) $[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{r}}^2] = 0.$

Možný postup: $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$, Einsteinova sumačná konvencia, t.j. $\hat{\mathbf{r}}^2 = \hat{x}_j\hat{x}_j$, $\hat{\mathbf{p}}^2 = \hat{p}_j\hat{p}_j$.