

Bonusové úlohy: List 5

Kvantová teorie I, NOFY075, Streda 10:40, F2

1 Anizotropný lineárny harmonický oscilátor (ALHO) 5 bodov

Častica sa nachádza v trojrozmernej potenciálovej jame, popísanej potenciálom $V(x_i)$. Budeme študovať pohyb častice v okolí minima potenciálu (jamy).

- (a) Zapište potenciál $V(x_i)$ aproximovaný druhým rádom Taylorovho rozvoja v okolí minima.
- (b) Položme $V(x_i) \approx V_2(x_i) = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m\omega_i x_i^2$. Vysvetlite pôvod konštánt ω_i . Vo $V_2(x_i)$ sa nenachádzajú zmiešané členy, napr. $x_1 x_2$. Je korektné tieto členy zanedbať? Je daný tvar $V_2(x_i)$ generický?
- (c) Zavedieme tri sady anihilačných a kreačných operátorov

$$\hat{x}_j = (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_j}}, \quad \hat{p}_j = i(\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j) \sqrt{\frac{\hbar m\omega_j}{2}}, \quad \text{kde } j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

(Imaginárnu jednotku označujeme symbolom i , na rozdiel od súradnicových indexov $i, j \in \{1, 2, 3\}$!) Spočítajte komutátory $[\hat{a}_i, \hat{a}_j]$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]$ a $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]$.

- (d) Hamiltonián častice je $\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V_2(\hat{x}_i)$. Vyjadrite $\hat{H} = \hat{H}(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger)$ pomocou operátorov $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$, $i = 1, 2, 3$. Dostali ste Hamiltonián troch nezávislých oscilátorov?
- (e) Nech $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1/2$. Stanovte štyri najnižšie vlastné energie ALHO, popísaného Hamiltoniánom z odseku (c).

2 Moment hybnosti a zákon zachovania v ALHO 4 body

Hamiltonián ALHO je vyjadrený cez anihilačné a kreačné operátory z úlohy **1**(c). Uvažujme špeciálny prípad s $\omega_1 = \omega_2$.

- (a) Vyjadrite operátor projekcie momentu hybnosti $\hat{L}_3 = \hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{x}_2 \hat{p}_1$ pomocou operátorov $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$. Bude užitočné upraviť výsledný výraz na tvar, v ktorom sú anihilačné operátory napravo od kreačných (tzv. *normálne usporiadanie*).
- (b) Vyjadrite komutátor $[\hat{H}, \hat{L}_3]$ (pomocou $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$). Vysvetlite výsledok.

Ďalší príklad je na druhej strane!

3 Kvantové fluktuácie momentu hybnosti**5 bodov**

Operátory momentu hybnosti \hat{L}_x, \hat{L}_y je možné vyjadriť pomocou zvyšovacích a znižovacích operátorov $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Použite tieto operátory k vyjadreniu strednej hodnoty \hat{L}_x a strednej kvadratickej odchýlky \hat{L}_x v stave $|l, m\rangle$.

(a) Spočítajte $\langle l, m | \hat{L}_x | l, m \rangle$. Využite vzťah

$$\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (2)$$

(b) Vyjadrite \hat{L}_x^2 cez \hat{L}_\pm .

(c) Spočítajte strednú kvadratickú odchýlku $(\Delta L_x)^2$ v stave $|l, m\rangle$.

(d) Vidíme, že v stave $|l, m\rangle$ moment hybnosti fluktuuje v smere x . Vyjadrite pomer $(\Delta L_x)^2 / \langle \hat{L}_z \rangle^2$ v stave $|l, l\rangle$. Interpretujte výsledok: Ako sa správa relatívna veľkosť fluktuácie \hat{L}_x s rastúcim l ?