

Bonusové úlohy: List 4
Kvantová teorie I, NOFY075, Utorok 15:40, F2

- 1** Koherentné stavy lineárneho harmonického oscilátora (LHO) 4 body
Koherentné stavy $|\alpha\rangle$ definujeme predpisom

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1)$$

kde $|n\rangle$ sú vlastné stavy LHO a α je komplexné.

- (a) Dokážte, že platí

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2)$$

- (b) Overte, či sú stavy $|\alpha\rangle$ zo vzťahu (1) normalizované.

- (c) Explicitným výpočtom odvodte nasledovný časový vývoj koherentného stavu

$$e^{-i\hat{H}t}|\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2}|\alpha(t)\rangle, \text{ kde } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} \quad (3)$$

Budete potrebovať vzťah $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ a výraz pre vlastné hodnoty energie LHO.

- (d) Odvodte vzťah pre časový vývoj strednej hodnoty polohy

$$x(t) := \langle \alpha(t) | \hat{x} | \alpha(t) \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega m}} \operatorname{Re} [\alpha(t)] \quad (4)$$

a ukážte, že ide o harmonické oscilácie. Výsledok porovnajte s úlohou **1**, List 2.

- 2** Energia koherentných stavov a klasický limit LHO 4 body
K vyriešeniu tejto úlohy potrebujete vzťahy (1) a (2).

- (a) Spočítajte strednú hodnotu energie v stave $|\alpha\rangle$. Návod: zide sa komplexne pridružená rovnica (2). Závisí stredná hodnota energie na čase?
- (b) Uvažujme α reálne a zavedme vzdialenosť y , definovanú predpisom $\alpha = y\sqrt{m\omega/2\hbar}$. Vyjadrite energiu koherentného stavu $|\alpha\rangle$ ako funkciu y . Výsledok porovnajte so vzťahom pre energiu klasického LHO. V akom limite sa bude energia koherentného stavu blížiť ku klasickému vzťahu?

3 Niektoré vlastnosti vodíka**3 body**

Elektrón v základnom stave atómu vodíka je opísaný vlnovou funkciou

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad \text{kde } a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}, \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (5)$$

- (a) Nájdite strednú vzdialenosť elektrónu od jadra
- (b) Nájdite strednú hodnotu potenciálnej energie $V(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ v tomto stave. Porovnajte s hodnotou potenciálnej energie v strednej vzdialenosti.

4 Komutačné vzťahy pre moment hybnosti**3 body**

Odvodte komutačné vzťahy:

- (a) $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$
- (b) $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i]$
- (c) $[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0$.
- (d) $[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{r}}^2] = 0$.

Možný postup: $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$, Einsteinova sumačná konvencia, t.j. $\hat{\mathbf{r}}^2 = \hat{x}_j \hat{x}_j$, $\hat{\mathbf{p}}^2 = \hat{p}_j \hat{p}_j$.