

Bonusové úlohy: List 8

Kvantová teorie I, NOFY075, Utorok 15:40, F2

Bude možné znova sa prihlásiť na riešenie poslednej nedoriešenej úlohy.

1 Atómy na povrchu izolantu

9 bodov

Dva atómy ("1" a "2") sú adsorbované na povrchu izolantu. Ich spinové momenty $\hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2$ (po zložkách $\hat{S}_{i,1}, \hat{S}_{i,2}, i = 1, 2, 3$) interagujú pomocou tzv. výmennej interakcie, ktorej Hamiltonián má tvar $I\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$, kde $I > 0$ je konštanta. Zároveň sa nachádzajú v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Hamiltonián, popisujúci excitované spinové stavy tohoto dvojatómového systému možno teda zapísať v tvare

$$\hat{H} = I\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \gamma B (\hat{S}_{z,1} + \hat{S}_{z,2}), \quad (1)$$

kde $\gamma > 0$ je konštanta.

- Zavedte operátor celkového spinu $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$. Ukážte, že prvý člen v Hamiltoniáne (1) sa dá vyjadriť pomocou kvadrátu celkového spinu (t.j. $\hat{\mathbf{S}}^2$).
- Keďže Hamiltonián komutuje s $\hat{\mathbf{S}}^2$ a \hat{S}_z , vlastné energie môžeme klasifikovať podľa kvantových čísel S, S_z . Napíšte explicitný tvar vlastných energií $E(S, S_z)$. Aké hodnoty S, S_z sú prípustné?
- Predpokladajte, že ide o atómy s celkovým spinom $\hbar/2$. Nakreslite graf vlastných energií v závislosti na γB , $\gamma B > 0$. Kedy nastáva degenerácia?

O fyzikálnej motivácii tohto cvičenia, ako aj závislosti energetických hladín na magnetickom poli, sa môžete dočítať v článku
Otte et al., Phys. Rev. Lett. 103, 107203 (2009)



2 Operátor celkového spinu dvoch častíc

4 body

Uvažujme dve častice (a, b), každá má rovnaký celkový spin $\hbar s$, s môže nadobúdať hodnoty $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Spinový moment hybnosti častice „a“ je reprezentovaný operátormi $\hat{S}_{i,a}$, $i = z, y, x$ (a podobne pre časticu „b“). Operátory spinového momentu hybnosti oboch častíc sú dané súčtom $\hat{S}_i = \hat{S}_{i,a} + \hat{S}_{i,b}$. Ukážte, že pre operátor celkového spinu platí $\hat{S}^2 = 2 \sum_i \hat{S}_{i,a} \hat{S}_{i,b} + \hbar^2 2s(s+1)$. Využite fakt, že spinové operátory častice „a“ komutujú s operátormi častice „b“.

3 Vlastné stavy operátora spinu dvoch častíc

5 bodov

Uvažujme dve častice (a, b) so spinom $\hbar/2$. Častica a je popísaná spinorom $\begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \chi_\downarrow \end{pmatrix}_a$ a častica b spinorom $\begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow \end{pmatrix}_b$. Spinor dvojčasticového systému je direktný súčin spinorov pre a a b, označíme ho $\begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \chi_\downarrow \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow \end{pmatrix}_b$. Je to veličina, určená štvoricou komplexných čísiel.

(a) Operátor projekcie spinu na os z je daný predpisom

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} (\hat{\sigma}_{z,a} \otimes \hat{1}_b + \hat{1}_a \otimes \hat{\sigma}_{z,b}) = \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_b \right], \quad (2)$$

kde pauliho matica $\hat{\sigma}_{z,a}$ pôsobí len na spinor častice a , $\hat{1}_a$ je jednotková matica na priestore spinorov a . Ukážte, že spinory $|11\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_b$ a $|1-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_b$ sú vlastnými vektormi \hat{S}_z a stanovte príslušné vlastné hodnoty.

(b) Podobne postupujte so spinormi

$$|10\rangle = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_b \right] / \sqrt{2} \quad \text{a} \quad |00\rangle = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_b - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_b \right] / \sqrt{2}.$$

(c) Operátor kvadrátu celkového spinu $\hat{S}^2 = \sum_i (\hat{S}_{i,a} + \hat{S}_{i,b})^2$ je vyjadrený pomocou operátorov spinu jednotlivých častíc, t.j. $\hat{S}_{i,a} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_{i,a} \otimes \hat{1}_b$ a $\hat{S}_{i,b} = \frac{\hbar}{2} \hat{1}_a \otimes \hat{\sigma}_{i,b}$. ukážte, že platí vzťah

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{2} \hbar^2 \hat{1}_a \otimes \hat{1}_b + \frac{1}{2} \hbar^2 \sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_{i,a} \otimes \hat{\sigma}_{i,b} \quad (3)$$

(d) Pomocou vyjadrenia (3) ukážte, že spinory $|S, S_z\rangle$ zavedené v [2](a) a [2](b) sú vlastnými stavmi \hat{S}^2 a určite zodpovedajúce vlastné hodnoty.

(e) ako sa transformujú spinory $|S, S_z\rangle$ pri výmene častíc $a \leftrightarrow b, b \leftrightarrow a$?